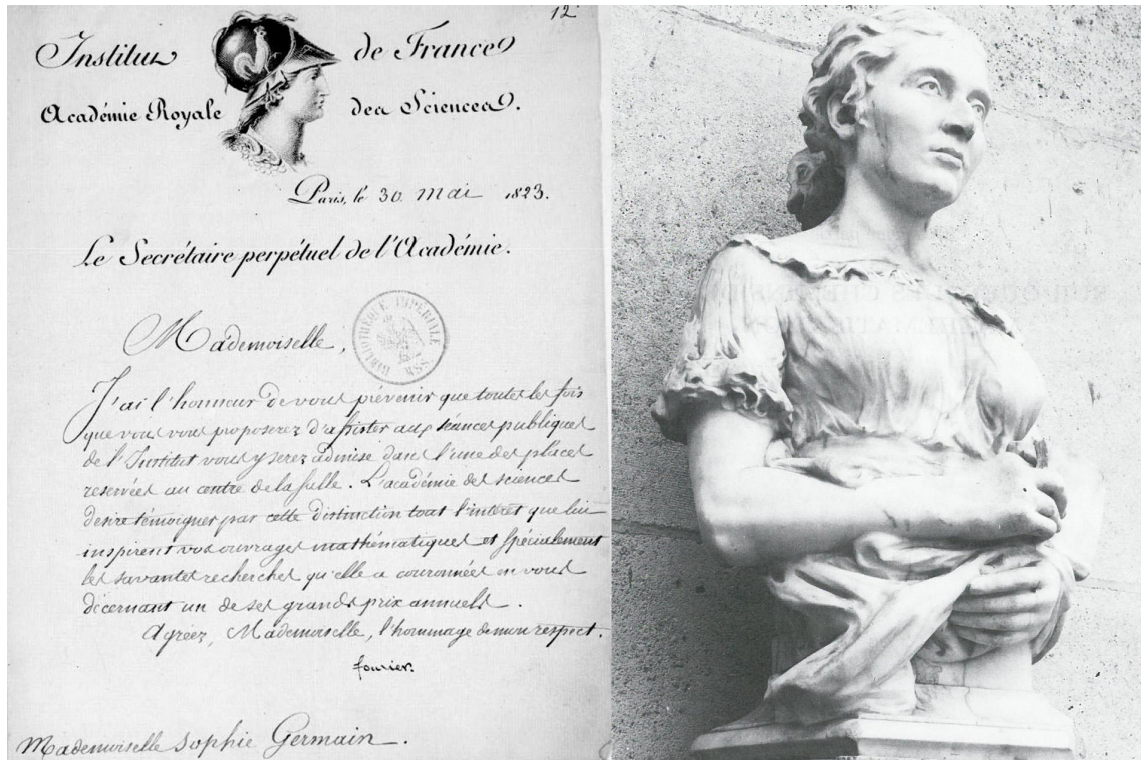


Problème 280 – Journée de la femme et nombres premiers de Sophie Germain

Niveau : Quatrième

Chapitres : Arithmétique

Inédit, publié le 08/03/2022



Tous les 8 mars sont bien sûr l'occasion de célébrer la journée de la femme, et de rappeler que depuis des siècles, les femmes luttent pour faire valoir leurs droits à égalité avec les hommes. Par exemple, à une époque où on considérait les mathématiques comme une discipline réservée aux hommes, vers la fin du XVIII^{ème} siècle, la Française Sophie Germain dut se battre pour être reconnue – et même en se faisant passer pour un homme écrivant aux professeurs les plus éminents afin être lue. Pour cette journée particulière, c'est à cette illustre pionnière que nous dédions ce problème.

Sophie Germain fut très connue pour ses travaux dans le domaine de l'arithmétique, c'est-à-dire l'étude des nombres rationnels, et même plus particulièrement des entiers. On lui doit notamment une suite de nombres premiers très particuliers, qu'on appellera plus tard les « nombres premiers de Sophie Germain », qui ont permis de faire des avancées dans l'étude de problèmes plus difficiles – notamment le grand Théorème de Fermat⁽¹⁾.

Ces nombres premiers particuliers sont décrits ainsi :

« Un nombre premier p est dit de Sophie Germain si $2p + 1$ est lui-même premier. On dit alors que le nombre $2p + 1$ est un nombre premier sûr ».

Par exemple, 2 est un nombre premier de Sophie Germain car $2 \times 2 + 1 = 5$ est un nombre premier, qui est donc lui-même premier sûr.

1) On considère la date du 8 mars, qu'on peut par exemple écrire sous la forme 8/03, donc associée au nombre 803. Justifier que 803 n'est pas un nombre premier.

2) On fait la somme ou la différence des chiffres 8 et 3 présents dans la date du 8 Mars. Montrer que pour chacun des résultats obtenus dans ces deux opérations, on obtient un nombre premier qui est à la fois de Sophie Germain et à la fois sûr.

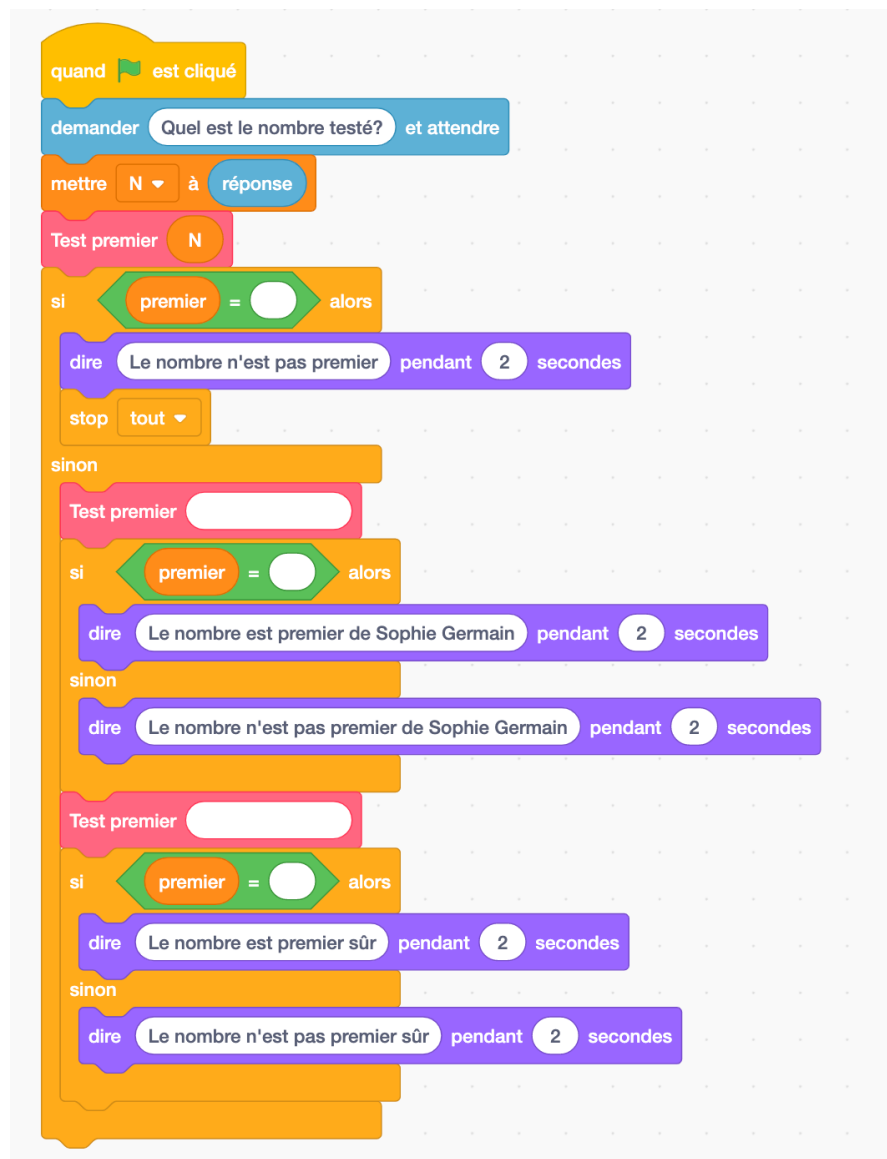
3) On peut aussi écrire la date du 8 mars sous la forme 8/3, donc associée au nombre 83. Montrer, en justifiant soigneusement, que 83 est à la fois un nombre premier de Sophie Germain et un nombre premier sûr.

Note : on rappelle que pour justifier qu'un nombre p est premier, on peut vérifier qu'il n'admet aucun diviseur entier strictement supérieur à 1 et inférieur à \sqrt{p} .

4) Certains voudraient bien aller plus loin, en espérant qu'un nombre associé à la date 08/03/AAAA, (AAAA désignent les chiffres de l'année en cours), et écrit indifféremment sous la forme 803AAAA ou 83AAAA, soit aussi un nombre premier de Sophie Germain ou un nombre premier sûr. Prouver que cela ne sera possible dans aucune année de 2022 jusqu'à 2026.

5) Pour tester davantage de valeurs associées à des dates, et notamment celles qui commencent par 803 ou 83, on utilise un programme Scratch. On **admet** qu'il existe un bloc « **Test premier N** » qui met une variable « **premier** » à la valeur 1 si le nombre N est premier, et 0 sinon.

Compléter le programme Scratch ci-dessous pour qu'il permette de dire si un nombre entré est premier de Sophie Germain ou/et premier sûr.



(1) Pour plus de détails : <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.ff/fermatgd.html>

Propriété de MathsAMoi.com / Tous droits réservés ©